**Объединенная межвузовская математическая олимпиада** **07.02.2016**

I вариант

**Задача 1.** Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015} \times 6\frac{19}{2016} - 13\frac{1996}{2015} \times 2\frac{1997}{2016} - 9 \times \frac{19}{2015}.$$

**Задача 2.** В $1^{\text{а}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 2. Среди ответов были получены такие: $(13, 11)$, $(17, 11)$, $(14, 14)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

**Задача 3.** При каких натуральных $n > 1$ найдутся $n$ подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $L$. Найдите длину отрезка $AL$, если длина вектора $4 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = & 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 931 \end{cases}.$$

**Задача 6.** Вычислите $2 \operatorname{arctg} 2 + \arcsin \dfrac{4}{5}$.

**Задача 7.** Пусть $OP$ — диаметр окружности $\Omega$, $\omega$ — окружность с центром в точке $P$ и радиусом меньше, чем у $\Omega$. Окружности $\Omega$ и $\omega$ пересекаются в точках $C$ и $D$. Хорда $OB$ окружности $\Omega$ пересекает окружность $\omega$ в точке $A$. Найдите длину отрезка $AB$, если $BD \cdot BC = 5$.

**Задача 8.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет единственное решение?

**Задача 9.** Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

**Задача 10.** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $a$, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

**Объединенная межвузовская математическая олимпиада** **07.02.2016**

II вариант

**Задача 1.** Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{16}{2015} \times 9\frac{17}{2016} - 2\frac{1999}{2015} \times 17\frac{1999}{2016} - 27 \times \frac{16}{2015}.$$

**Задача 2.** В $1^{\text{б}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 4. Среди ответов были получены такие: $(15, 18)$, $(15, 10)$, $(12, 13)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

**Задача 3.** На доске написано несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016. Чему может равняться наименьшее из этих чисел?

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ с отношением сторон $AB : AC = 4 : 3$ биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $L$. Найдите длину отрезка $AL$, если длина вектора $3 \cdot \overrightarrow{AB} + 4 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - xy + y^2 & = & 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 91 \end{array} \right. .$$

**Задача 6.** Вычислите $2 \operatorname{arctg} 3 + \arcsin \dfrac{3}{5}$.

**Задача 7.** Пусть $OP$ — диаметр окружности $\Omega$, $\omega$ — окружность с центром в точке $P$ и радиусом меньше, чем у $\Omega$. Окружности $\Omega$ и $\omega$ пересекаются в точках $C$ и $D$. Хорда $OB$ окружности $\Omega$ пересекает окружность $\omega$ в точке $A$. Найдите длину отрезка $AB$, если $BD \cdot BC = 5$.

**Задача 8.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$ имеет не более двух решений?

**Задача 9.** Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 512 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

**Задача 10.** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $a$, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

---

**Объединенная межвузовская математическая олимпиада** **07.02.2016**

III вариант

**Задача 1.** Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{3}{2015} \times 8\frac{11}{2016} - 11\frac{2012}{2015} \times 3\frac{2005}{2016} - 12 \times \frac{3}{2015}.$$

**Задача 2.** В $1^{\text{в}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 2. Среди ответов были получены такие: $(12, 18)$, $(15, 15)$, $(11, 15)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

**Задача 3.** На доске написано несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016. Чему может равняться наибольшее из этих чисел?

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ с отношением сторон $AB : AC = 5 : 2$ биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $L$. Найдите длину отрезка $AL$, если длина вектора $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 & = & 37 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 481 \end{cases}.$$

**Задача 6.** Вычислите $2 \operatorname{arctg} 4 + \arcsin \dfrac{8}{17}$.

**Задача 7.** Пусть $OP$ — диаметр окружности $\Omega$, $\omega$ — окружность с центром в точке $P$ и радиусом меньше, чем у $\Omega$. Окружности $\Omega$ и $\omega$ пересекаются в точках $C$ и $D$. Хорда $OB$ окружности $\Omega$ пересекает окружность $\omega$ в точке $A$. Найдите длину отрезка $AB$, если $BD \cdot BC = 5$.

**Задача 8.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$ имеет ровно три решения?

**Задача 9.** Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

**Задача 10.** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $a$, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами во всех вершинах этой пирамиды.

**Объединенная межвузовская математическая олимпиада** **07.02.2016**

IV вариант

**Задача 1.** Представьте в виде несократимой дроби

$$6\frac{7}{2015} \times 4\frac{5}{2016} - 7\frac{2008}{2015} \times 2\frac{2011}{2016} - 7 \times \frac{7}{2015}.$$

**Задача 2.** В $1^{\text{г}}$ классе каждого ребенка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребенок не считает). Каждый ребенок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 4. Среди ответов были получены такие: $(10, 14)$, $(13, 11)$, $(13, 19)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

**Задача 3.** Сколько существует натуральных чисел $n > 1$, для которых найдутся $n$ подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ с отношением сторон $AB : AC = 7 : 2$ биссектриса угла $BAC$ пересекает сторону $BC$ в точке $L$. Найдите длину отрезка $AL$, если длина вектора $2 \cdot \overrightarrow{AB} + 7 \cdot \overrightarrow{AC}$ равна 2016.

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + xy + y^2 & = & 23 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 & = & 253 \end{array} \right. .$$

**Задача 6.** Вычислите $2 \operatorname{arctg} 5 + \arcsin \dfrac{5}{13}$.

**Задача 7.** Пусть $OP$ — диаметр окружности $\Omega$, $\omega$ — окружность с центром в точке $P$ и радиусом меньше, чем у $\Omega$. Окружности $\Omega$ и $\omega$ пересекаются в точках $C$ и $D$. Хорда $OB$ окружности $\Omega$ пересекает окружность $\omega$ в точке $A$. Найдите длину отрезка $AB$, если $BD \cdot BC = 5$.

**Задача 8.** При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$ имеет более одного решения?

**Задача 9.** Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более, чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 512 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

**Задача 10.** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $a$, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами во всех вершинах этой пирамиды.

---